# POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

**Definición de monomio.**

Expresión algebraica formada por el producto de un número finito de constantes y variables con exponente natural. Al producto de las constantes se la denomina parte numérica, al producto de las variables se la denomina parte literal.

Se define como grado del monomio a la suma de las exponentes de las variables, y se dice que dos monomios son semejantes cuando tienen igual parte literal.

| Monomio | Parte literal | Grado |
|---|---|---|
| $5x^3$ | $x^3$ | 3 |
| $2xy^3$ | $xy^3$ | 1+3 = 4 |
| $5x^2yz^4$ | $x^2yz^4$ | 2+1+4 |

**Definición de polinomio.**

Polinomio = Suma de monomios. Un polinomio es una expresión algebraica formada por un número finito de variables y constantes que solo admiten operaciones de suma, resta, multiplicación y potenciación con exponente natural. Ejemplos:

$$P(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 7$$

$$Q(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy + 5x - 4y + 12$$

$$S(x, y, z) = 3x^2yz^3 - 7y^2z^2 + 6x^2y - zx + 4y - 1$$

## SUMA, RESTA Y MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

### Suma o resta de monomios

Si dos monomios son semejantes, su suma es otro monomio con la misma parte literal.

Si dos monomios no son semejantes, su suma se dejará indicada.

$$\left(5x^2\right) + \left(7x^3\right) = 5x^2 + 7x^3 \qquad \left(5x^2\right) + \left(7x^2\right) = 12x^2$$

En ambos casos se han sumado los dos monomios. En el primero, el resultado de la suma no ha podido simplificarse y la suma de los dos monomios queda como un binomio. En el segundo caso, la suma se puede simplificar porque los dos monomios son semejantes.

La resta es similar a la suma, pues recordemos que restar es sumar el opuesto.

### Suma o resta de polinomios

Para sumar polinomios se agrupan los monomios del mismo grado.

La resta de dos polinomios es la suma del primero con el opuesto del segundo.

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 3x^4 + 5x^3 \qquad\quad - 2x + 3 \\ Q(x) = & \qquad\;\; 2x^3 - 6x^2 + 5x - 3 \\ \hline P(x) + Q(x) = & 3x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 3x \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 3x^4 + 5x^3 \qquad\quad - 2x + 3 \\ -Q(x) = & \quad - 2x^3 + 6x^2 - 5x + 3 \\ \hline P(x) - Q(x) = & 3x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 7x + 6 \end{array}$$

### Multiplicación de monomios

El producto de dos monomios es otro monomio cuyo grado es la suma de los grados de los factores.

$$\left(3x^5\right)\cdot\left(7x^3\right)=21x^8 \qquad \left(\frac{2}{3}x^3\right)\cdot(5x)=\frac{10}{3}x^4 \qquad (2x)\cdot(x)=2x^2$$

### Multiplicación de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada término del polinomio.

$$\left(3x^4+5x^3-2x+3\right)\cdot\left(2x^2\right)=\left(3x^4\right)\cdot\left(2x^2\right)+\left(5x^3\right)\cdot\left(2x^2\right)-(2x)\cdot\left(2x^2\right)+(3)\cdot\left(2x^2\right)=$$
$$=6x^6+10x^5-4x^3+6x^2$$

### Multiplicación de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada monomio de uno de los polinomios por cada uno de los monomios del otro y se simplifica el resultado agrupando términos semejantes.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & 3x^4 & +5x^3 & & -2x & +3 \\
 & & \times & & 2x^2 & -\ x & +3 \\
\hline
 & & 9x^4 & +15x^3 & & -6x & +9 \\
 & -\ 3x^5 & -\ 5x^4 & & +2x^2 & -\ 3x & \\
6x^6 & +10x^5 & & -\ 4x^3 & +6x^2 & & \\
\hline
6x^6 & +\ 7x^5 & +\ 4x^4 & +\ 11x^3 & +\ 8x^2 & -9x & +9
\end{array}$$

Observa que, al disponer los cálculos, tanto en los polinomios factores como en los productos parciales, dejamos un hueco cuando falta el monomio de un grado intermedio.

### Identidades notables.

$$(a+b)^2=a^2+2a\cdot b+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2a\cdot b+b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Las identidades notables se pueden utilizar en cualquier sentido. De izquierda a derecha se utilizarán para desarrollar y simplificar expresiones, de derecha a izquierda, se utilizarán principalmente para factorizar.

# DIVISIÓN DE POLINOMIOS

## Cociente de monomios

El cociente de monomio por otro monomio de grado inferior es un nuevo monomio cuyo grado es la diferencia de los grados de los monomios que se dividen.

$$\left(ax^m\right):\left(bx^n\right)=\frac{ax^m}{bx^n}=\frac{a}{b}x^{m-n}$$

## División de polinomios

Para entender bien cómo se dividen dos polinomios, sigue los pasos sobre el ejercicio resuelto que aparece a continuación y lee las explicaciones del proceso.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & +5x^3 & & -2x & +3 & x^2-3x+2 \\ \cline{6-6}
-3x^4 & +9x^3 & -6x^2 & & & \underbrace{3x^2+14x+36}_{\text{cociente}}=C(x) \\ \cline{1-5}
\diagup & 14x^3 & -6x^2 & -2x & +3 & \\
 & -14x^3 & +42x^2 & -28x & & \\ \cline{2-5}
 & \diagup & 36x^2 & -30x & +3 & \\
 & & -36x^2 & +108x & -72 & \\ \cline{3-5}
 & & \diagup & \underbrace{78x} & \underbrace{-69}_{\text{resto}}=R(x) &
\end{array}$$

1. En el dividendo, dejamos huecos en los términos que faltan.
2. Dividimos el monomio de mayor grado del dividendo por el monomio de mayor grado del divisor: $\left(3x^4\right):\left(x^2\right)=3x^2$. este es el primer monomio del cociente.
3. El producto de $3x^2$ por el divisor, cambiando el signo, se coloca bajo el dividendo y se suma.
4. El primer resto es $14x^3-6x^2-2x+3$.
5. A partir de aquí volvemos a proceder como en los apartados 2. y 3 hasta llegar a un resto de menor grado que el divisor

## División entera y división exacta

Del anterior ejercicio resuelto, hemos partido de dos polinomios, el dividendo P(x) y el divisor Q(x). El resultado de la división nos da otros dos polinomios: el cociente C(x) y el reto R(x).

$$\begin{array}{r|l}
P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2}
R(x) & C(x)
\end{array}$$

$$P(x)=Q(x)\cdot C(x)+R(x) \quad \text{o bien} \quad \frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

El resultado de dividir dos polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$ puede no ser un polinomio.

A la división entre polinomios en la que, además del cociente, hay un resto, se la llama **división entera.** Cuando el resto es 0, se dice que la **división** es **exacta.**

### Ejemplo de división entera

$$\frac{3x^4+5x^3-2x+3}{x^2-3x+2}=3x^2+14x+36+\frac{78x-69}{x^2-3x+2}$$

Observa que:

- El grado del cociente es la diferencia de los grados del numerador y del denominador
- El grado del resto es inferior al del denominador.

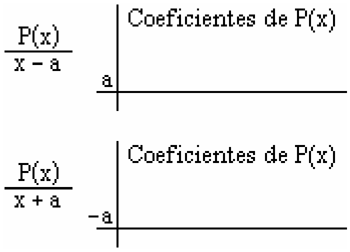
### Ejemplo de división exacta

$$\frac{6x^6+7x^5+4x^4+11x^3+8x^2-9x+9}{3x^4+5x^3-2x+3}=2x^2-x+3$$

Es una división exacta.

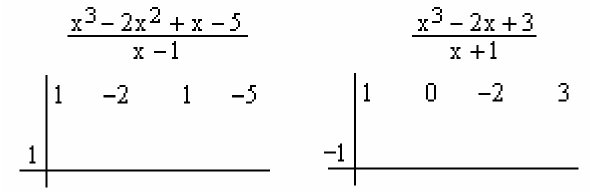
**División de un polinomio por el binomio x – a. REGLA DE RUFFINI**

Es frecuente tener que dividir un polinomio por expresiones del tipo x – a. Un procedimiento por el cual estas divisiones se realizan de forma rápida y cómoda, es el denominado método de Ruffini.

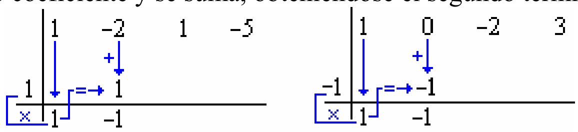



Para aplicar la regla de Ruffini, se ordena el dividendo completo de forma decreciente y se escriben solo los coeficientes, colocando un cero como coeficiente de los términos que falten, el divisor se pone en el lateral inferior izquierdo cambiado de signo tal como indica la figura.

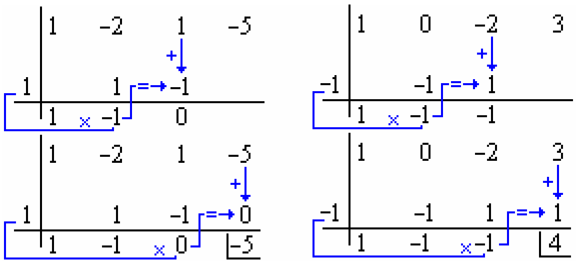
**Ejemplos.**



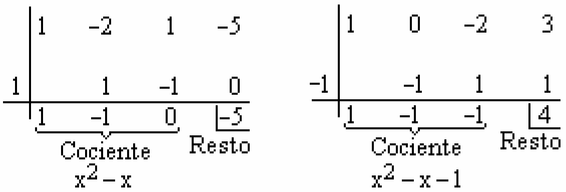

El primer coeficiente del dividendo se baja a la línea de cociente, se multiplica por el divisor se coloca debajo del segundo coeficiente y se suma, obteniéndose el segundo término del cociente.



La operación se repite de igual forma hasta llegar al último término del divisor, obteniendo en este caso como suma el valor del resto.



Una vez concluida la división se obtiene el polinomio cociente y el resto.




$$\frac{x^3 - 2x^2 + x - 5}{x - 1} = x^2 - x + \frac{-5}{x - 1} \qquad \frac{x^3 - 2x + 3}{x + 1} = x^2 - x - 1 + \frac{4}{x + 1}$$

Generalidades::

i. El cociente es un polinomio en x de un grado menor que el polinomio dividendo.
ii. Los coeficientes de mayor grado del dividendo y del cociente siempre son iguales.

**Ejemplo.** Dividir por el método de Ruffini:

$$\frac{x^3-3x^2+5x+4}{x+1}$$

**Solución.**

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & -3 & 5 & 4 \\
-1 & & -1 & 4 & -9 \\
\hline
 & \underbrace{1 \quad -4 \quad 9}_{\text{Cociente}} & & & \underbrace{\boxed{-5}}_{\text{Resto}}
\end{array}$$

$$\frac{x^3-3x^2+5x+4}{x+1}=x^2-4x+9+\frac{-5}{x+1}$$

## Teorema de resto y del factor.

Se llama **valor numérico de un polinomio** P(x) para x = a $(P(a))$, al número que resulta al sustituir en dicho polinomio la variable x por el número a y efectuar las operaciones.

**Ejemplo,** Calcular el valor numérico del polinomio $P(x)=x^3-x^2+2$ en los siguientes casos:

**a)** $x=2$
**b)** $x=0$
**c)** $x=-1$

**Solución.**

**a)** $P(2)=2^3-2^2+2=6$

**b)** $P(0)=0^3-0^2+2=2$

**c)** $P(-1)=(-1)^3-(-1)^2+2=0$

**Teorema del resto**: El resto de la división de un polinomio P(x) por un binomio (x – a) es igual al valor numérico del polinomio para x = a.

$$\Re\text{esto}\left[\frac{P(x)}{x-a}\right]=P(a)$$

**Ejemplo.** Sin hacer la división calcular el resto de las siguientes divisiones:

**a)** $\left(x^3-x-1\right):(x-2)$

**b)** $\left(x^4-3x^2+2x-1\right):(x+1)$

**Solución.**

**a)** $\Re\text{esto}\left[\frac{P(x)}{x-2}\right]=P(2)=2^3-2-1=5$

**b)** $\Re\text{esto}\left[\frac{P(x)}{x+1}\right]=P(-1)=(-1)^4-3\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)-1=-5$

El problema más típico del teorema del resto es calcular algún parámetro del polinomio conocido el valor del resto en una determinada división.

**Ejemplo.** Calcular el parámetro m para que el resto de la división de $P(x)=x^3+mx^2-3x+2$ por el binomio x + 2 sea –3.

**Solución.**

Aplicando el teorema del resto:

$$\Re\text{esto}\left[\frac{P(x)}{x+2}\right]=P(-2)$$

Según nos informa el enunciado, el resto vale –3.

$$-3=(-2)^3+m(-2)^2-3(-2)+2$$

$$-3=-8+4m+6+2\ :\ -3=4m\ :\ m=-\frac{3}{4}$$

**Ejemplo.** Calcular k para que $P(x) = -x^3 + (2k+1)x - 2$ sea divisible por x – 1.

**Solución.**

Aplicando el teorema del resto:

$$\Re\text{esto}\left[\frac{P(x)}{x-1}\right] = P(1)$$

En este caso el enunciado nos informa que el resto es 0 con la frase *"el polinomio es divisible por x – 1"*.

$$0 = -1^3 + (2k+1)\cdot 1 - 2$$
$$0 = -1 + 2k + 1 - 2 \ : \ 2k - 2 = 0 \ : \ k = 1$$

**Teorema del factor**. Un polinomio P(x) tiene como factor x – a si el valor numérico de dicho polinomio para x = a es 0.

Este teorema permite conocer de forma rápida los factores de un polinomio sin tener que realizar la división.

## Raíz de un polinomio. Factorización.

Las soluciones de la ecuación polinómica que resulta de igualar el polinomio a cero $(P(x) = 0)$, se denominan raíces o ceros del polinomio P(x).

Según el teorema fundamental del álgebra, un polinomio de grado n puede tener como máximo n raíces reales.

Las raíces enteras de un polinomio, si existen, se encuentran entre los divisores del término independiente.

Si un polinomio P(x) de grado n tiene n raíces $a_1$, $a_2$, $a_3$… $a_n$ y α es el coeficiente del término de mayor grado, el polinomio puede escribirse de forma factorizada.

$$P(x) = \alpha \cdot (x - a_1)\cdot(x - a_2)\cdot(x - a_3)\cdot \ldots \cdot (x - a_n)$$

Las raíces de un polinomio pueden repetirse, al número de veces que se repite una raíz se le denomina multiplicidad de la raíz.

Los polinomios que son se pueden factorizar se denominan polinomios irreducibles

Para factorizar un polinomio se puede utilizar diferentes estrategias, factor común (en el caso de que el polinomio no tenga término independiente) expresiones notables, teorema del factor, resolución de ecuaciones de segundo grado, teorema de factor y fundamentalmente método de Ruffini.

**Ejemplo.** Factorizar los siguientes polinomios.

**a)** $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

**b)** $Q(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x$

**c)** $R(x) = x^3 + 8$

**d)** $S(x) = x^3 - 3x + 2$

**e)** $T(x) = 2x^2 + 6x^2 - 2x - 6$

**Solución.**

**a.** Se aplica el método de Ruffini de forma escalonada, teniendo en cuenta que los posibles divisores serán los múltiplo de 6 (±1, ±2, ±3, ±6).

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -5 & 6 \\
1 & & 1 & -1 & -6 \\
\hline
 & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \\
-2 & & -2 & 6 & \\
\hline
 & 1 & -3 & \boxed{0} & \\
3 & & 3 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$$P(x) = (x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$$

**b.** Se saca factor común x y se aplica el método de Ruffini de forma escalonada sobre el polinomio resultante, teniendo en cuenta que los posibles divisores serán los múltiplo de 4 (±1, ±2).

$$Q(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x = x\left(x^3 + 4x^2 - x - 4\right)$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 4 & -1 & -4 \\
1 & & 1 & 5 & 4 \\
\hline
 & 1 & 5 & 4 & \lfloor 0 \\
-1 & & -1 & -4 & \\
\hline
 & 1 & -4 & \lfloor 0 & \\
4 & & 4 & & \\
\hline
 & 1 & \lfloor 0 & &
\end{array}$$

$$Q(x) = x\left(x-1\right)\cdot\left(x+1\right)\cdot\left(x-4\right)$$

**c.** Se plica el método de Ruffini una vez y se llega a un polinomio de segundo grado irreducible (no admita más soluciones enteras y la ecuación de segundo confirma que no tiene soluciones).

$$R(x) = x^3 + 8$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 8 \\
-2 & & -2 & 4 & -8 \\
\hline
 & 1 & -2 & 4 & \lfloor 0
\end{array}$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} \notin R$$

Polinomio irreducible

$$R(x) = \left(x+2\right)\cdot\left(x^2 - 2x + 4\right)$$

**d.** Se aplica el método de Ruffini de forma escalonada, teniendo en cuenta que los posibles divisores serán los múltiplo de 2 (±1, ±2).

$$S(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & \lfloor 0 \\
1 & & 1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & \lfloor 0 & \\
-2 & & -2 & & \\
\hline
 & 1 & \lfloor 0 & &
\end{array}$$

$$S(x) = \left(x-1\right)^2 \cdot \left(x+2\right)$$

El polinomio tiene una raíz de multiplicidad 2 (x = 1).

**e.** Se aplica el método de Ruffini de forma escalonada, teniendo en cuenta que los posibles divisores serán los múltiplo de 6 (±1, ±2, ±3, ±6). En la factorización hay que colocar el coeficiente del término de mayor grado (2).

$$T(x) = 2x^2 + 6x^2 - 2x - 6$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 6 & -2 & -6 \\
1 & & 2 & 8 & 6 \\
\hline
 & 2 & 8 & 6 & \lfloor 0 \\
-1 & & -2 & -6 & \\
\hline
 & 2 & 6 & \lfloor 0 & \\
-3 & & -6 & & \\
\hline
 & 2 & \lfloor 0 & &
\end{array}$$

$$T(x) = 2\cdot\left(x+2\right)\cdot\left(x+1\right)\cdot\left(x+3\right)$$

## Mínimo común múltiplo y máximo común divisor.

Para calcular el mínimo común múltiplo o el máximo común divisor, se factorizan los polinomios:

- Mínimo común múltiplo (m.c.m.). Factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente
- Máximo común divisor (M.C.D.). Factores comunes elevados al menor exponente.

**Ejemplo.** Calcular el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los siguientes polinomios: $P(x)=x^3+x^2-x-1$; $Q(x)=x^3-3x+2$

**Solución.**

$P(x)=x^3+x^2-x-1$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & & 1 & 2 & 1 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & -1 & \\
\hline
 & 1 & 1 & \boxed{0} & \\
-1 & & -1 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$Q(x)=x^3-3x+2$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\
1 & & 1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} & \\
-2 & & -2 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

Aplicando el método de Ruffini se factorizan los dos polinomios.

$$P(x)=(x+1)^2\cdot(x-1)$$
$$Q(x)=(x+2)\cdot(x-1)^2$$

- $\text{m.c.m.}[P(x),Q(x)]=(x+2)\cdot(x+1)^2\cdot(x-1)^2$
- $\text{M.C.D.}[P(x),Q(x)]=(x-1)$

## Fracciones algebraicas.

Se llama fracción algebraica al cociente de dos polinomios A(x) y B(x), siendo B(x) ≠ 0.

$$\frac{A(x)}{B(x)}$$

Se dice que dos fracciones algebraicas $\frac{A(x)}{B(x)}$ y $\frac{C(x)}{D(x)}$ son equivalentes si y solo si:

$$A(x)\cdot D(x)=C(x)\cdot B(x)$$

Suma de fracciones algebraicas: $\frac{A(x)}{B(x)}+\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x)\cdot D(x)+C(x)\cdot B(x)}{B(x)\cdot D(x)}$

Resta de fracciones algebraicas: $\frac{A(x)}{B(x)}-\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x)\cdot D(x)-C(x)\cdot B(x)}{B(x)\cdot D(x)}$

Producto de fracciones algebraicas: $\frac{A(x)}{B(x)}\cdot\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x)\cdot C(x)}{B(x)\cdot D(x)}$

Cociente de fracciones algebraicas: $\frac{A(x)}{B(x)}\div\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x)\cdot D(x)}{B(x)\cdot C(x)}$

Las propiedades de las operaciones con fracciones algebraicas son análogas a las de las fracciones numéricas.

**Ejemplo.**

Calcular: $\frac{2x}{x+1}-\frac{x-1}{x+2}$

**Solución.**

$$\frac{2x}{x+1}-\frac{x-1}{x+2}=\frac{2x\cdot(x+2)-(x-1)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{2x^2+4x-\left(x^2-1\right)}{x^2+2x+x+2}=\frac{x^2+4x+1}{x^2+3x+2}$$